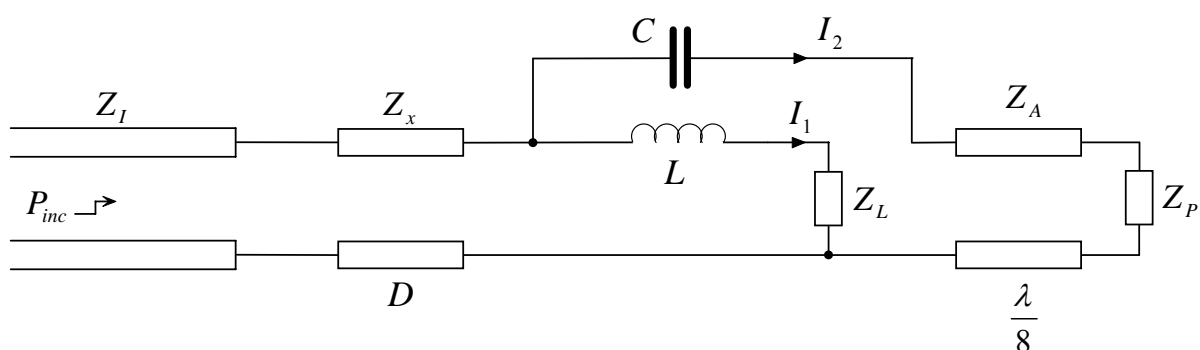


# ESERCIZIO 6 - TUTORATO PROPAGAZIONE A.A. 06/07

11-12/04/2007

Esercizio 1 (8 punti /)

Prova scritta di propagazione (1° parte) - ?? ?? ????



$$f = 6 \text{ GHz} \quad P_{inc} = 3 \text{ W} \quad Z_L = 100 \, \Omega \quad Z_A = 100 \cdot (2 - \sqrt{3}) \, \Omega \quad Z_P = \frac{Z_A}{2} \cdot (1 + j\sqrt{3}) \, \Omega$$

- Determinare i valori di  $L$  e  $C$  necessari ad avere le due correnti  $I_1$ ,  $I_2$  con lo stesso modulo e sfasate di  $135^\circ$ .
- Per  $D = 0$ , la potenza riflessa sulla linea di alimentazione è pari a  $0.8 \text{ W}$ . Calcolare il valore di  $Z_I (< 300 \, \Omega)$ .
- Per  $d = \lambda/4$ , determinare  $Z_x$  per massimizzare la potenza assorbita dai due carichi, e calcolarla.

## SOLUZIONI

$$L = 6,4 \text{ nH}$$

$$C = 0,11 \text{ pF}$$

$$Z_I = 108,885 \, \Omega$$

$$Z_x = 192,809 \, \Omega$$

$$P_A = 3 \text{ W}$$

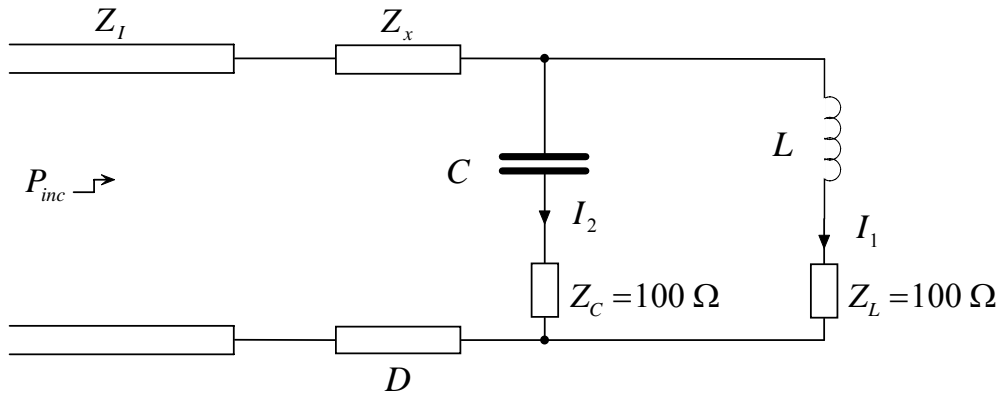
### A) Calcolo di L e C per avere la condizione richiesta sulle correnti

Finché possibile conviene semplificare il circuito complessivo. Guardando la linea di impedenza  $Z_A$  di lunghezza  $\lambda/8$ , questa è terminata su un carico noto  $Z_P$ . Conviene sostituire allora al complesso linea di trasmissione-carico la sua impedenza equivalente vista nella sezione a destra della capacità  $C$ .

Visto che si tratta di una linea lunga  $\lambda/8$  chiusa su un carico, a prescindere dalla frequenza, la sua impedenza di ingresso vale:

$$\begin{aligned} Z_C &= Z_A \cdot \frac{Z_P + j \cdot Z_A}{Z_A + j \cdot Z_P} = \\ &= Z_A \cdot \frac{\frac{Z_A}{2}(1 + j \cdot \sqrt{3}) + j \cdot Z_A}{Z_A + j \cdot \frac{Z_A}{2}(1 + j \cdot \sqrt{3})} = \\ &= Z_A \cdot \frac{(1 + j \cdot \sqrt{3}) + j \cdot 2}{2 + j \cdot (1 + j \cdot \sqrt{3})} = \\ &= Z_A \cdot \frac{1 + j \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) + j} = \\ &= Z_A \cdot \frac{1 + j \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) + j} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3}) - j}{(2 - \sqrt{3}) - j} = \\ &= Z_A \cdot \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + j \cdot (4 - 3 - 1)}{4 + 3 - 4\sqrt{3} + 1} = \\ &= 100 \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{(2 - \sqrt{3})} = 100[\Omega] \end{aligned}$$

Il circuito si semplifica allora secondo quanto segue:



La condizione sulle correnti richiesta è traducibile nella seguente relazione, utilizzando anche la formula di Eulero per l'esponenziale complesso:

$$I_1 = I_2 \cdot e^{\pm j \frac{3}{4} \pi} = I_2 \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Una seconda condizione sulle correnti deriva dal fatto che i due carichi, formati dalla serie della capacità con la resistenza da  $100 \, \Omega$  e dalla serie dell'induttanza sempre con una resistenza da  $100 \, \Omega$ , sono sottoposti alla stessa caduta di tensione  $V$ , cioè:

$$I_1 \cdot (Z_L + j \cdot X_L) = I_2 \cdot (Z_C - j \cdot X_C) \quad \text{con} \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad X_L = \omega \cdot L$$

Ricavando il rapporto tra le correnti dalla prima relazione e inserendolo nella seconda si ottiene:

$$\left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (Z_L + j \cdot X_L) = (Z_C - j \cdot X_C)$$

Equazione complessa in due incognite; l'eguaglianza è verificata quando contemporaneamente le parti reali e immaginarie dei due membri si eguagliano.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot Z_L \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot X_L = Z_C$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} Z_L - \frac{\sqrt{2}}{2} X_L = -X_C$$

La prima fornisce

$$X_L = \frac{2 \cdot Z_C + \sqrt{2} \cdot Z_L}{\mp \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 100 + \sqrt{2} \cdot 100}{\mp \sqrt{2}} \Big|_+ = (1 + \sqrt{2}) \cdot 100$$

la scelta del segno positivo della radice al denominatore è obbligata perché la reattanza, per come è stata definita, non può essere negativa; tale scelta si ripercuote sulla scelta del segno della seconda relazione che sarà quello negativo (segno nella posizione sottostante).

La seconda relazione ci conduce quindi a:

$$X_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (X_L + Z_L) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [(1 + \sqrt{2}) \cdot 100 + 100] = (1 + \sqrt{2}) \cdot 100$$

Questi valori permettono poi di ricavare la capacità e l'induttanza.

Tenendo conto che:

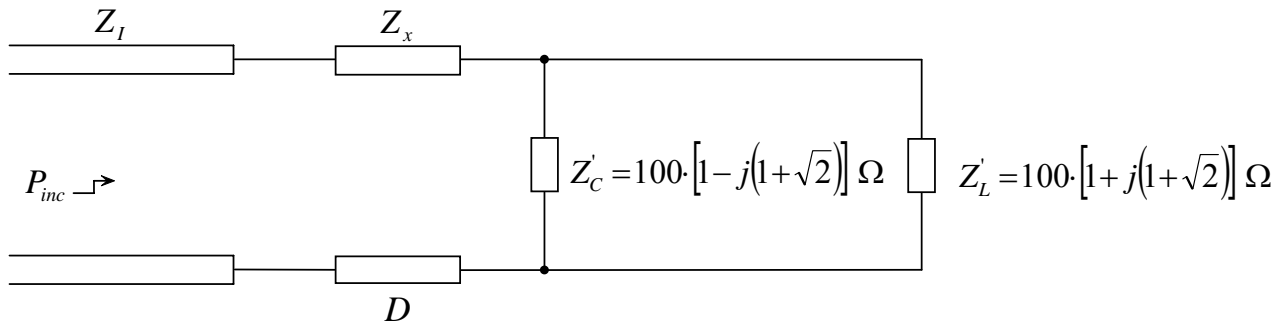
$$f = 6 \text{ GHz} \qquad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 37.699 \cdot 10^9 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

allora:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{100 \cdot (1 + \sqrt{2})}{37.699 \cdot 10^9} = 6,4 \text{ nH}$$

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{100 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot 37.699 \cdot 10^9} = 0,11 \text{ pF}$$

Il risultato ottenuto conduce ad un circuito così semplificato:

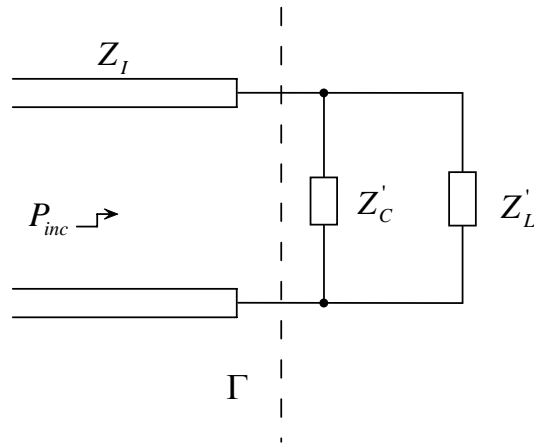


Dove le impedenze di carico sono costituite dalla serie della resistenza da 100  $\Omega$  con la capacità da un lato, e la serie della resistenza con l'induttanza dall'altro:

$$Z'_c = Z_L + j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L} = 100 \cdot [1 - j(1 + \sqrt{2})] \Omega$$

$$Z'_L = Z_L + j \cdot \omega \cdot L = 100 \cdot [1 + j(1 + \sqrt{2})] \Omega$$

**B) Calcolo della potenza in assenza della linea centrale (D=0).**



La potenza riflessa, dato del problema, è calcolabile a partire da quella incidente se si conosce il coefficiente di riflessione  $\Gamma$  in uscita dalla linea di alimentazione (di impedenza  $Z_I$  incognita).

A tale linea è connesso il parallelo delle due impedenze, note dal punto precedente. Conviene calcolare il parallelo di queste due impedenze riducendole ad una unica:

$$Y_{PA} = Y'_C + Y'_L = \frac{1}{100 \cdot [1 + j \cdot (1 + \sqrt{2})]} + \frac{1}{100 \cdot [1 + j \cdot (1 + \sqrt{2})]} =$$

$$= \frac{1}{100} \frac{[1 - j \cdot (1 + \sqrt{2})] + 100 \cdot [1 + j \cdot (1 + \sqrt{2})]}{1^2 + (1 + \sqrt{2})^2} = \frac{2}{100 \cdot (4 + 2 \cdot \sqrt{2})} \text{ S}$$

Possiamo anche scrivere l'impedenza di carico come:

$$Z_{PA} = \frac{1}{Y_{PA}} = 100 \cdot (2 + \sqrt{2}) \Omega$$

Il coefficiente di riflessione vale, secondo quanto dato dal problema:

$$P_{rif} = P_{inc} \cdot |\Gamma|^2 \quad |\Gamma| = \sqrt{\frac{P_{rif}}{P_{inc}}} = \sqrt{\frac{0.8}{3}} = 0.194$$

Ma il modulo del coefficiente di riflessione vale anche:

$$|\Gamma| = \left| \frac{Z_{PA} - Z_I}{Z_{PA} + Z_I} \right|$$

Poiché le due impedenze sono reali, ed inoltre  $Z_{PA} = 100 \cdot (2 + \sqrt{2}) \Omega \cong 341 \Omega$  mentre secondo quanto richiesto dal testo  $Z_I < 300 \Omega$ , ovvero  $Z_{PA} > Z_I$ , il modulo del coefficiente di riflessione vale nel caso specifico:

$$|\Gamma| = \frac{Z_{PA} - Z_I}{Z_{PA} + Z_I}$$

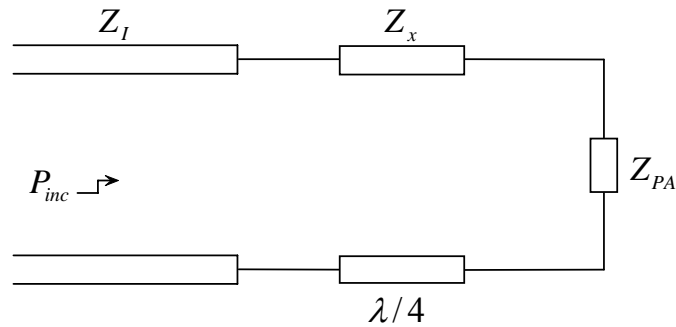
Da cui si ricava, essendo tutte impedenze reali (si può evitare il modulo):

$$(Z_{PA} + Z_I) \cdot |\Gamma| = (Z_{PA} - Z_I)$$

$$Z_I = Z_{PA} \cdot \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|}$$

$$Z_I = Z_{PA} \cdot \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = 100 \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{1 - 0.194}{1 + 0.194} = 108,88 \Omega$$

**C) Calcolo della impedenza caratteristica della linea  $Z_x$ .**



Poiché l'impedenza caratteristica della linea di alimentazione è reale, così pure il carico, siamo nelle condizioni di un adattamento a trasformatore  $\lambda/4$ .

L'impedenza  $Z_x$  vale semplicemente

$$Z_x = \sqrt{Z_{PA} \cdot Z_I} = \sqrt{100 \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot 108,88} = 192,81 \, \Omega$$

La potenza trasferita al carico, trattandosi di un adattamento  $\lambda/4$ , non può che essere tutta quella disponibile dal generatore ovvero quella incidente nella linea di alimentazione:

$$P_A = 3W$$